CONVEGNO "MATEMATICA E STORIA" NEL LICEO MATEMATICO
FERRARA, 11 DICEMBRE 2020

Il V postulato e la nascita delle geometrie non euclidee. Un laboratorio con le sfere di Lénárt.

Presented by Alessandro Gambini e Camilla Spagnolo

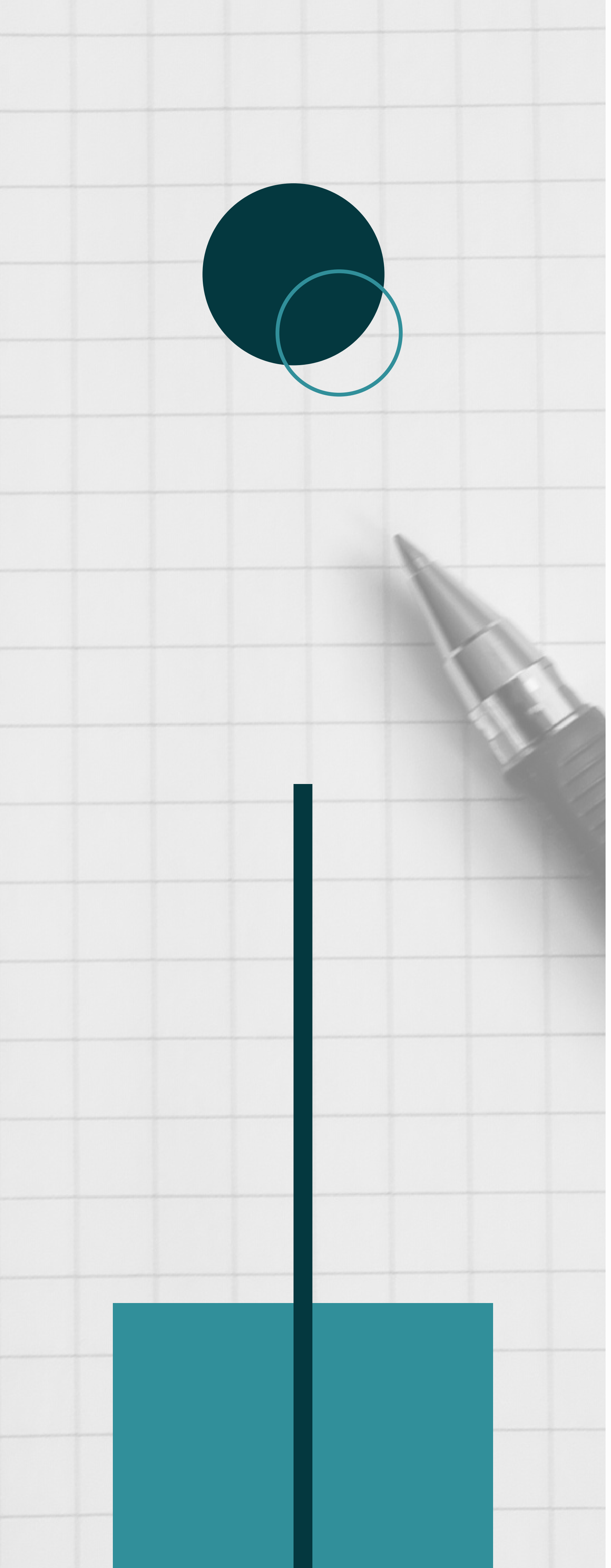
NOTE STORICHE

GLI ELEMENTI DI EUCLIDE

- Nel 1482 a Venezia venivano stampati per la prima volta gli Elementi di Euclide nell'edizione curata da Campano di Novara con traduzione dall'arabo in latino del testo.

- A questa edizione sono seguite tante altre.

- Niccolò Tartaglia tradusse per primo in italiano dal latino gli Elementi di Euclide nel 1543 (questa è anche la prima traduzione in volgare).



GEOMETRIE NON EUCLIDEE

Una **geometria non euclidea** è una geometria costruita negando alcuni postulati euclidei.

Il quinto postulato di Euclide è quello che nel corso dei secoli ha suscitato il maggior interesse perché a differenza degli altri postulati non è "evidentemente vero". Molti sono stati i tentativi di dimostrare il V postulato o di riformularlo o, addirittura, di sostituirlo con altri equivalenti.

L'impossibilità di dimostrare il postulato delle parallele, condusse molti matematici a pensare che fosse indipendente dagli altri quattro e si cercò di dimostrarlo (dimostrazione per assurdo) mostrando l'inconsistenza delle nuove teorie nate sostituendo il V postulato con la sua negazione. Questo approccio dimostrativo condusse alla nascita delle geometrie non euclidee.

Manuale di gioco

…la geometria non euclidea non contiene assolutamente nulla di contradditorio, sebbene molti dei suoi risultati debbano sulle prime essere ritenuti paradossali; tuttavia scambiare ciò per una contraddizione sarebbe unicamente un'illusione, provocata dalla vecchia abitudine a considerare la geometria euclidea strettamente vera.

GAUSS, LETTERA A UN AMICO DEL 12 LUGLIO 1831

Postulati

I

"Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto".

II

"E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta".

III

"E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni disanza (=raggio)".

IV

"E che gli angoli retti siano uguali tra loro".

E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (=tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno aincontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (=la cui somma è minore di due retti).

V POSTULATO

PROPOSIZIONI

- LE PRIME 28 E LA 31 SONO INDIPENDENTI DAL V POSTULATO

- DIPENDONO DAL V POSTULATO TUTTE LE ALTRE, TRA CUI LA 29, LA 32, LA 47 (TEOREMA DI PITAGORA)

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r, esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r.

FORMULAZIONE DI PLAYFAIR DEL V POSTULATO

GEOMETRIA ELLITTICA, TEORIZZATA DA RIEMANN NEL 1854

Assioma di Riemann
Due rette qualsiasi di un piano hanno sempre almeno un punto in comune.

Conseguenza: non esistono rette parallele.

GEOMETRIA IPERBOLICA, TEORIZZATA DA BOLYAI E LOBACEVSKJI NEL 1830

Assioma di Lobacecskji
Data una retta qualsiasi ed un punto esterno ad essa, esistono infnite rette ad essa parallele passanti per tale punto.

APPROCCIO COMPARATIVO GEOMETRIA DEL PIANO

GEOMETRIA SFERICA

Individuare le analogie e le differenze fra geometria euclidea del piano e geometria sferica porta ad un notevole approfondimento della geometria del piano:

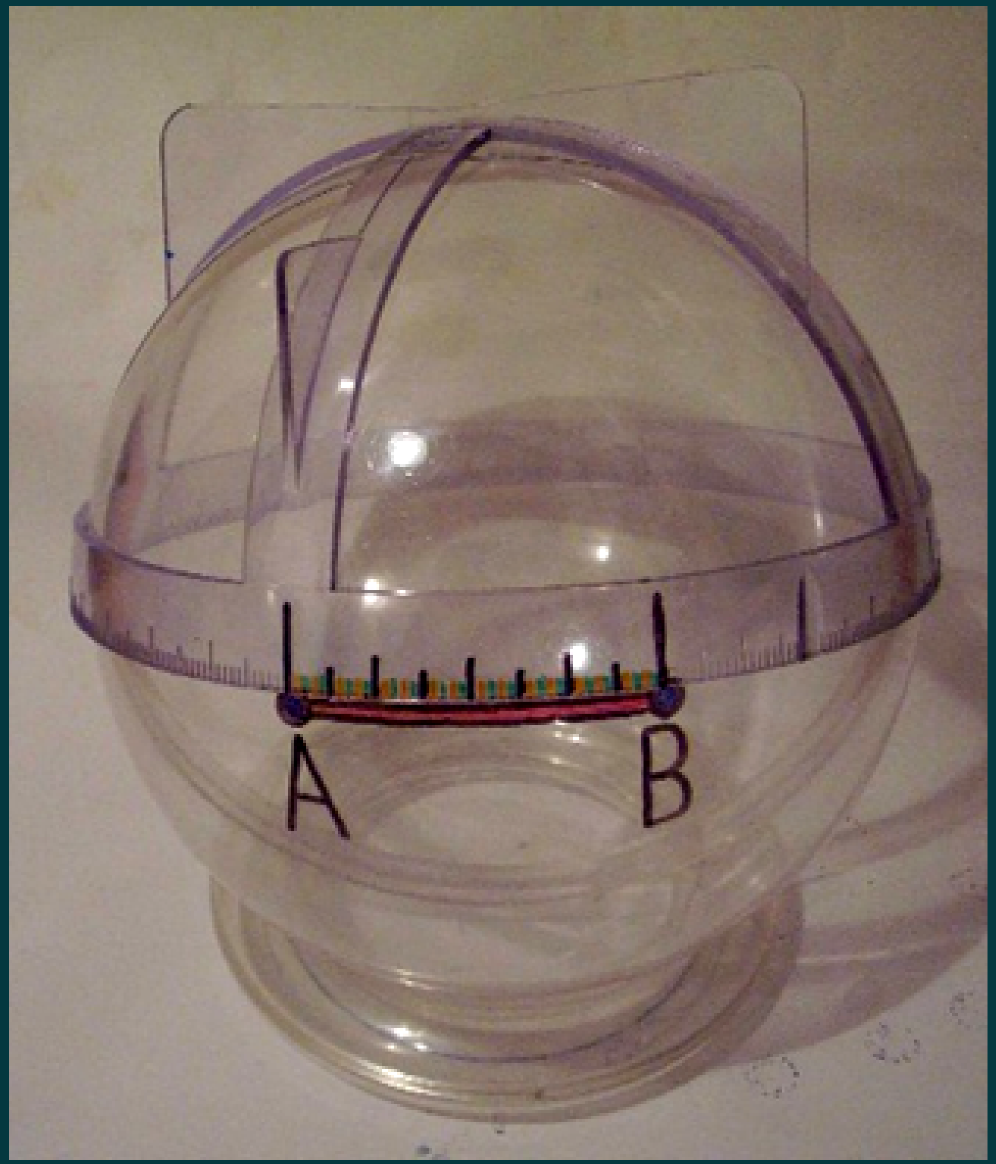
Perché un certo teorema è valido nel piano ma non sulla sfera?
Che cosa si utilizza nel piano per dimostrarlo?
Fondamentali i controesempi che portano a comprendere i limiti di validità di un teorema o di una definizione in una teoria

Gli studenti comprendono che, per ogni problema significativo che incontrano in una delle due geometrie, ne esiste un altro concettualemnte analogo nell'altra. Imparano, quindi, a tradurre un problema di geometria piana nell'equivalente problema di geometria sferica e viceversa.

Gli studenti arrivano a proporre loro stessi problemi per confrontarne le soluzioni nelle due teorie; sperimentano che lo stesso problema può avere una soluzione diversa in un contesto diverso in cui esiste un diverso insieme di regole. Molto interessante la proposta di costruzioni geometriche (con stesse istruzioni) che portano a «risultati» diversi nelle due geometrie.

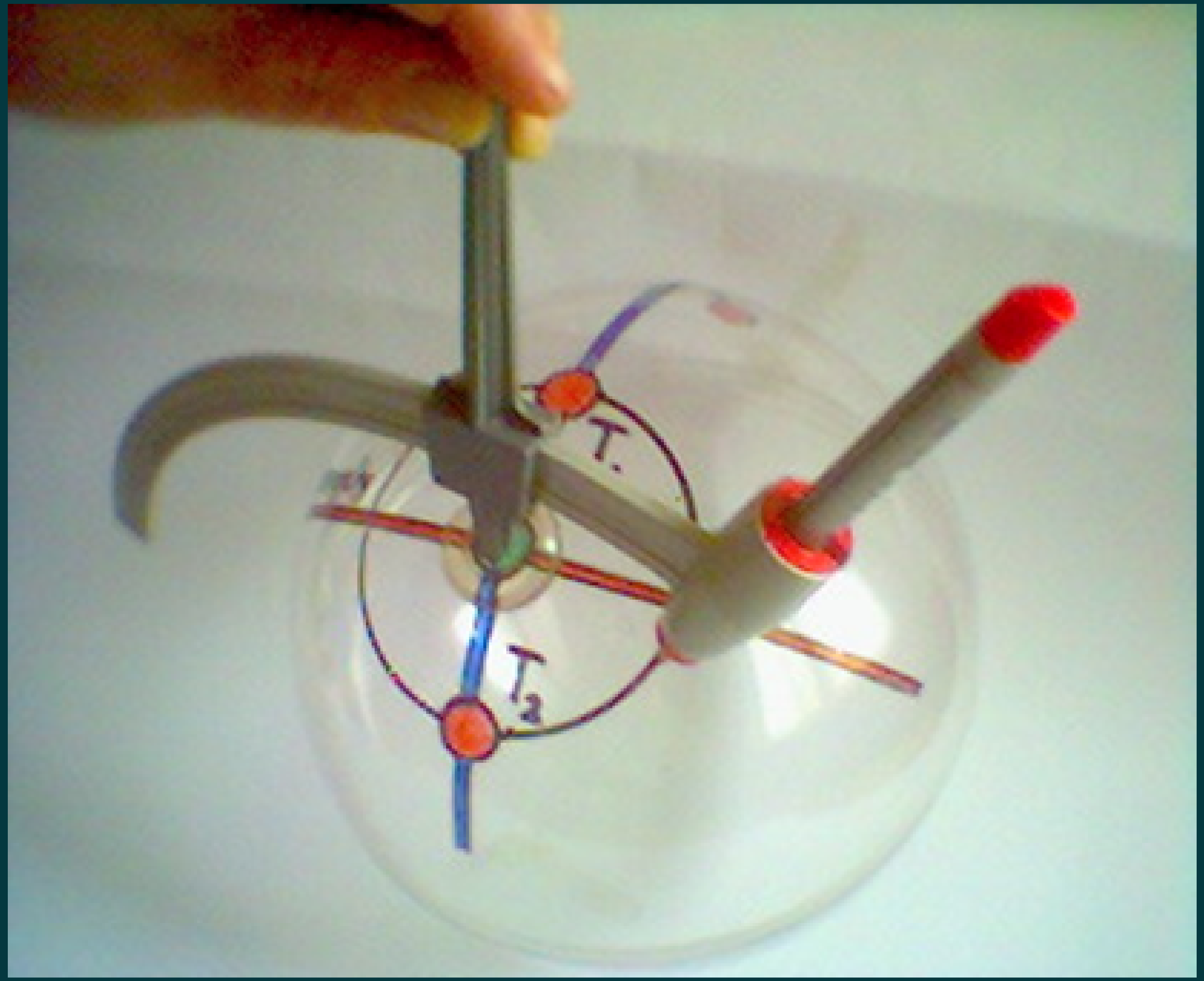
Superfici su cui disegnare

Righello

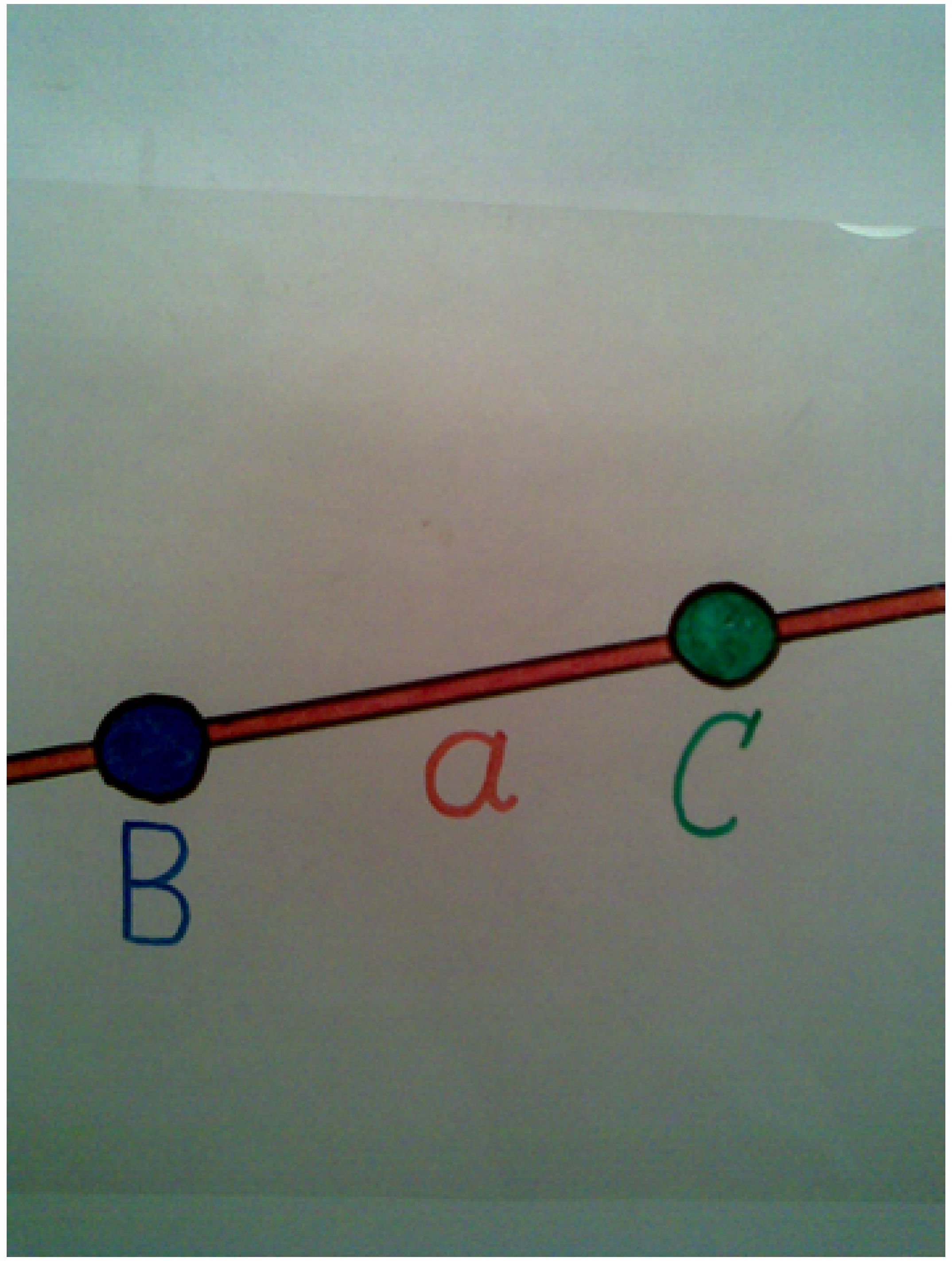


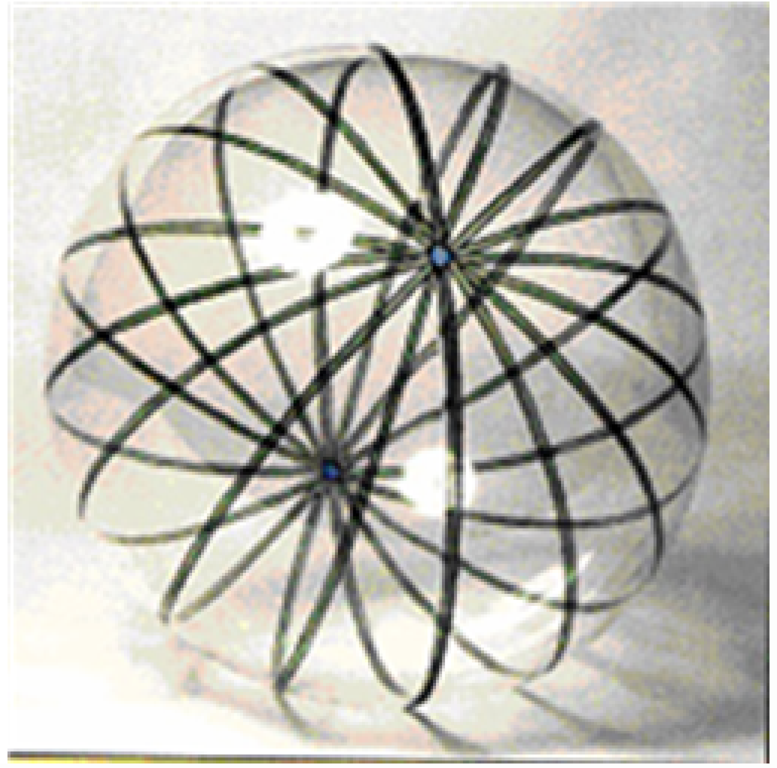
Goniometro

Compasso

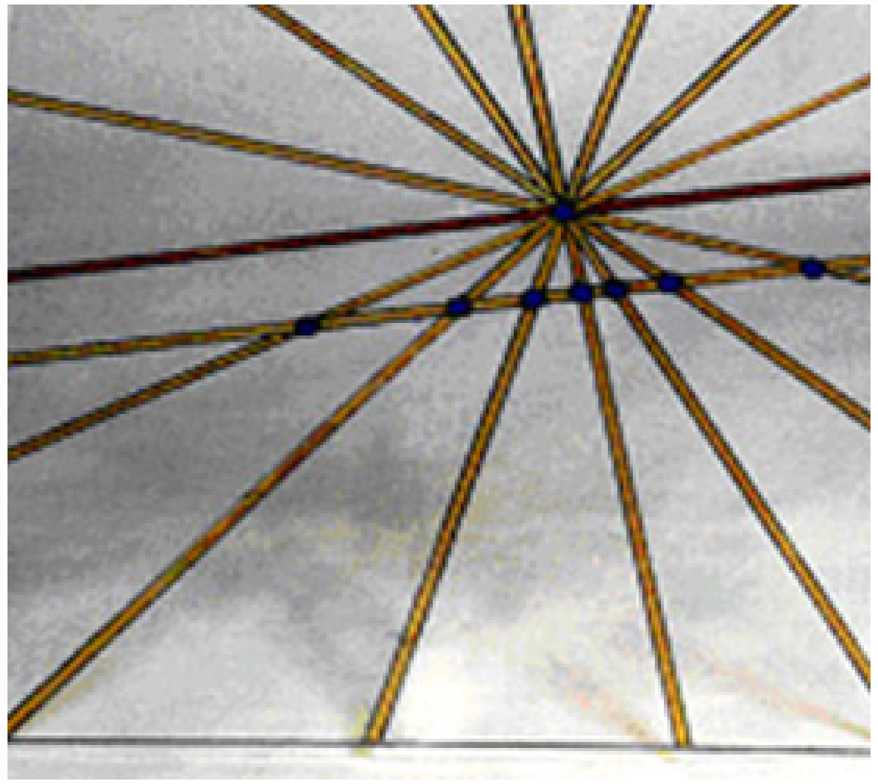


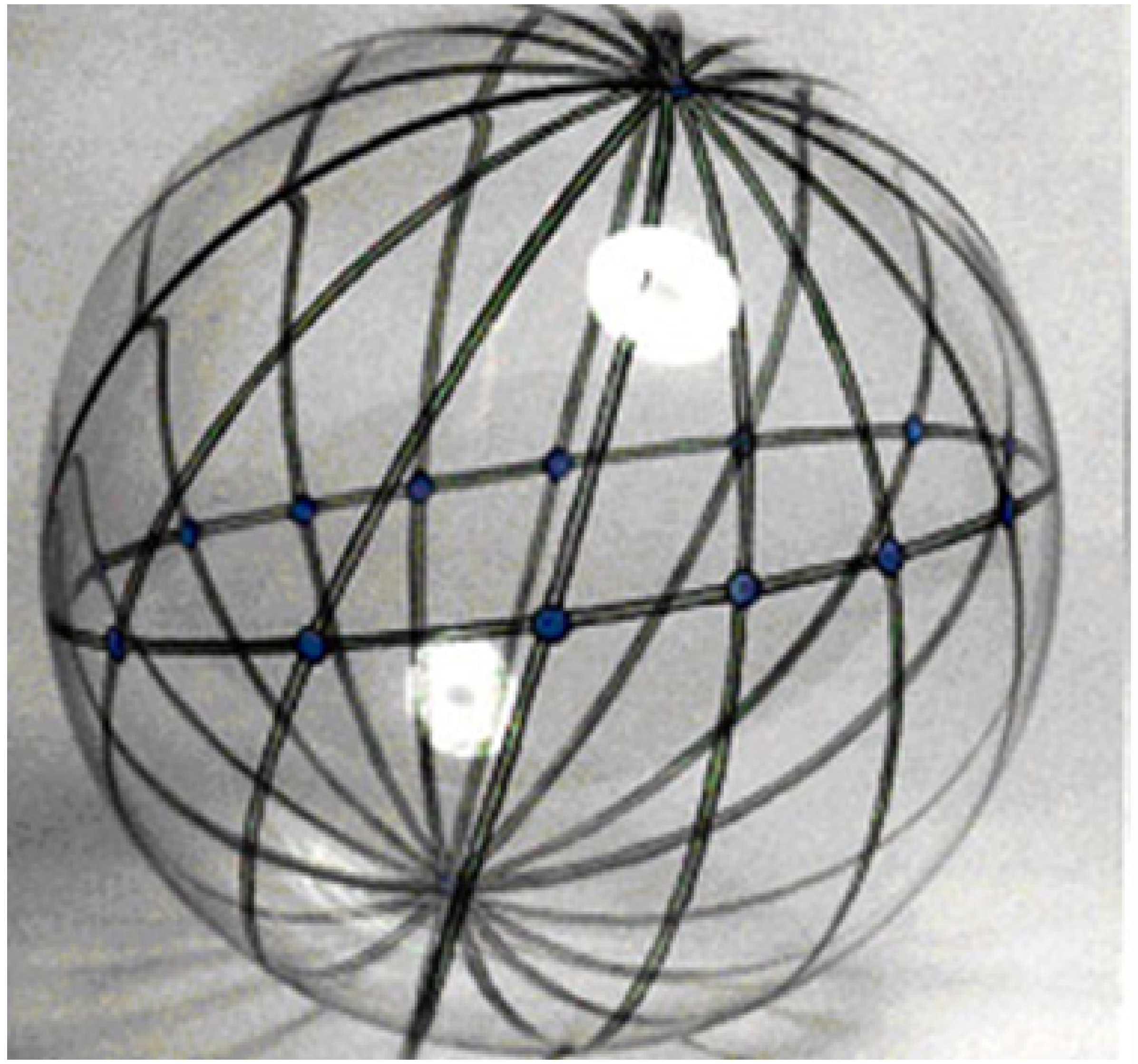
QUANTE RETTE PER DUE PUNTI DISTINTI?





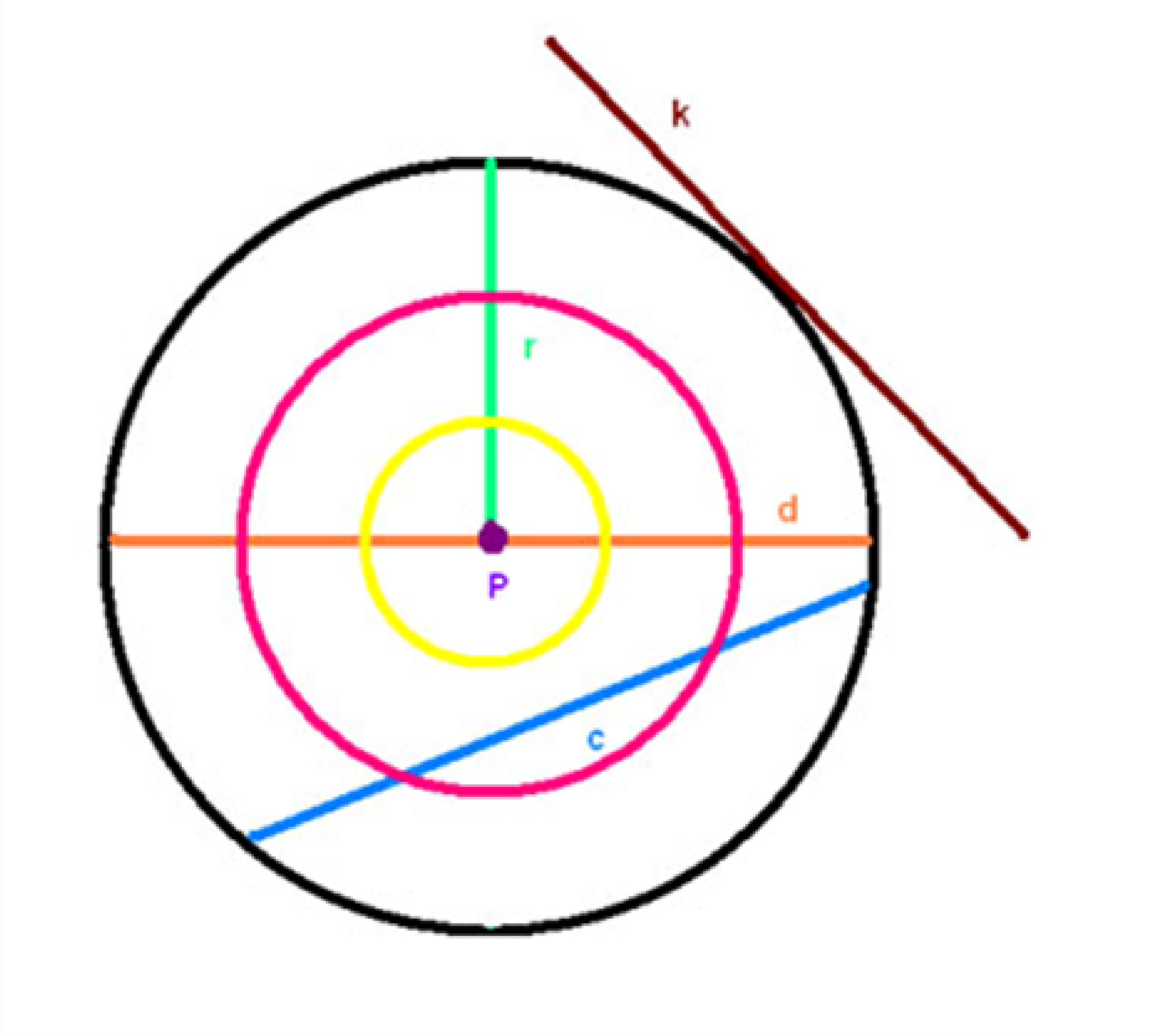
QUANTI PUNTI COMUNI HANNO DUE RETTE?

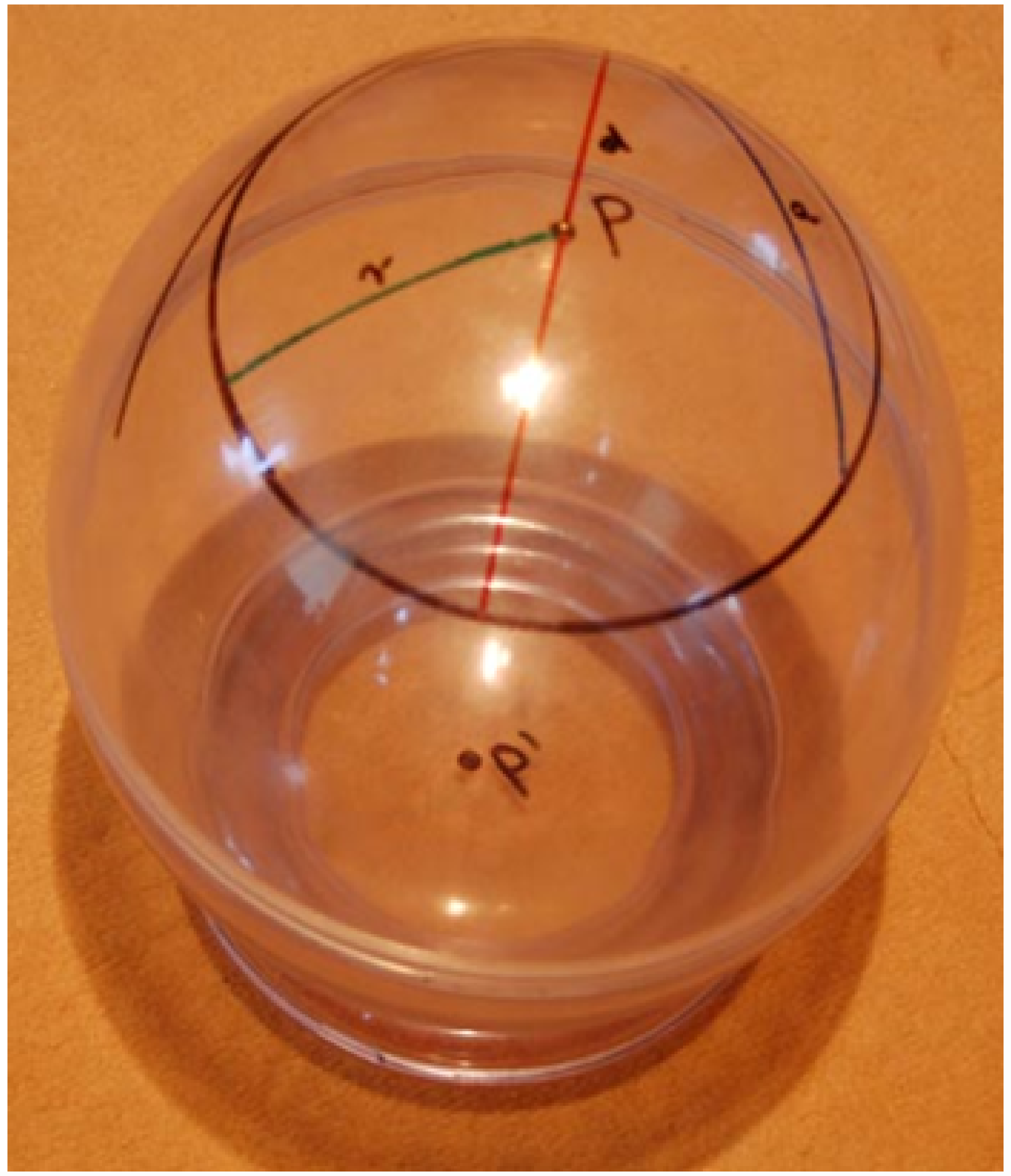




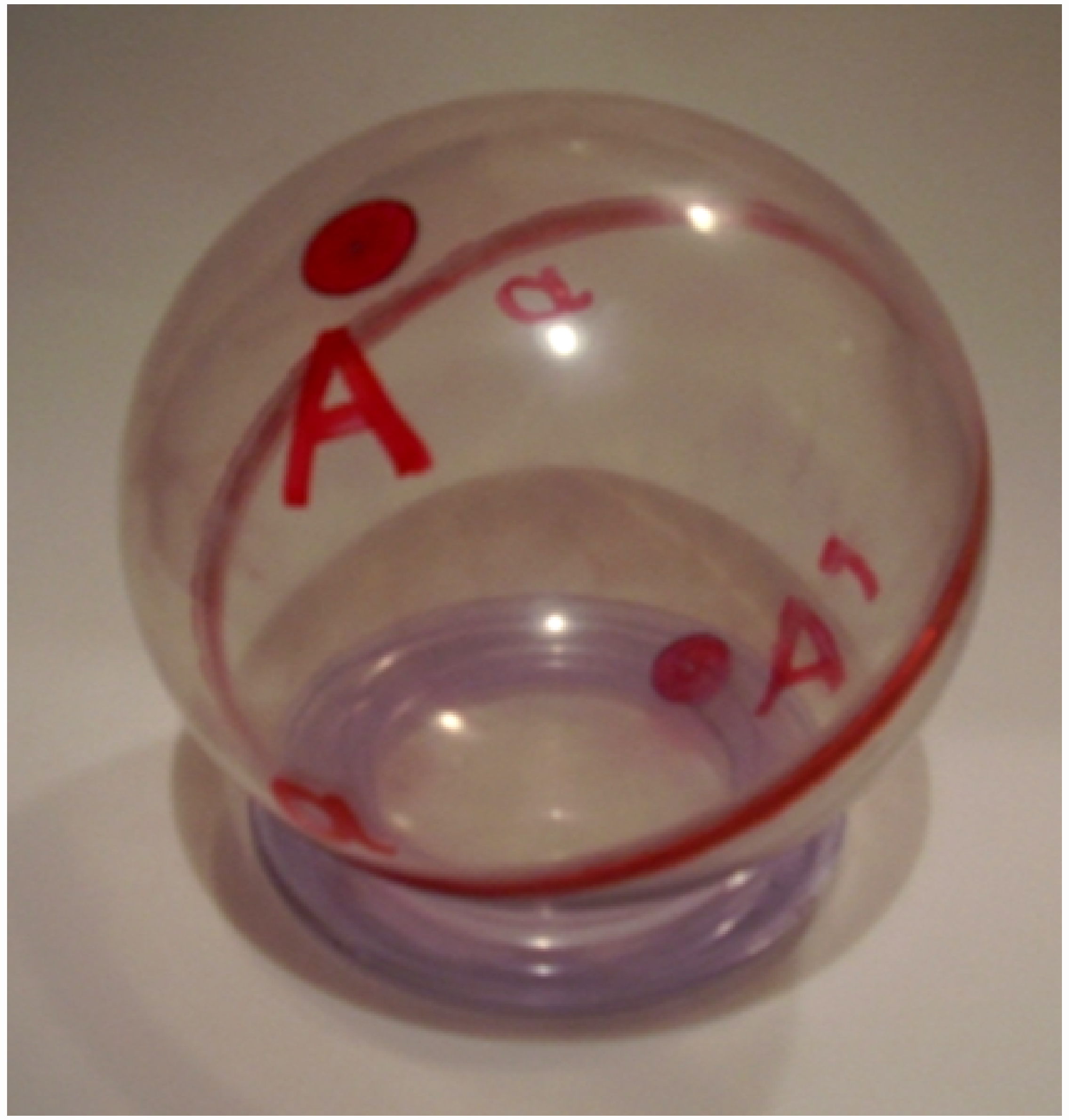
PERPENDICOLARITÀ

CERCHI
QUANTI CENTRI?

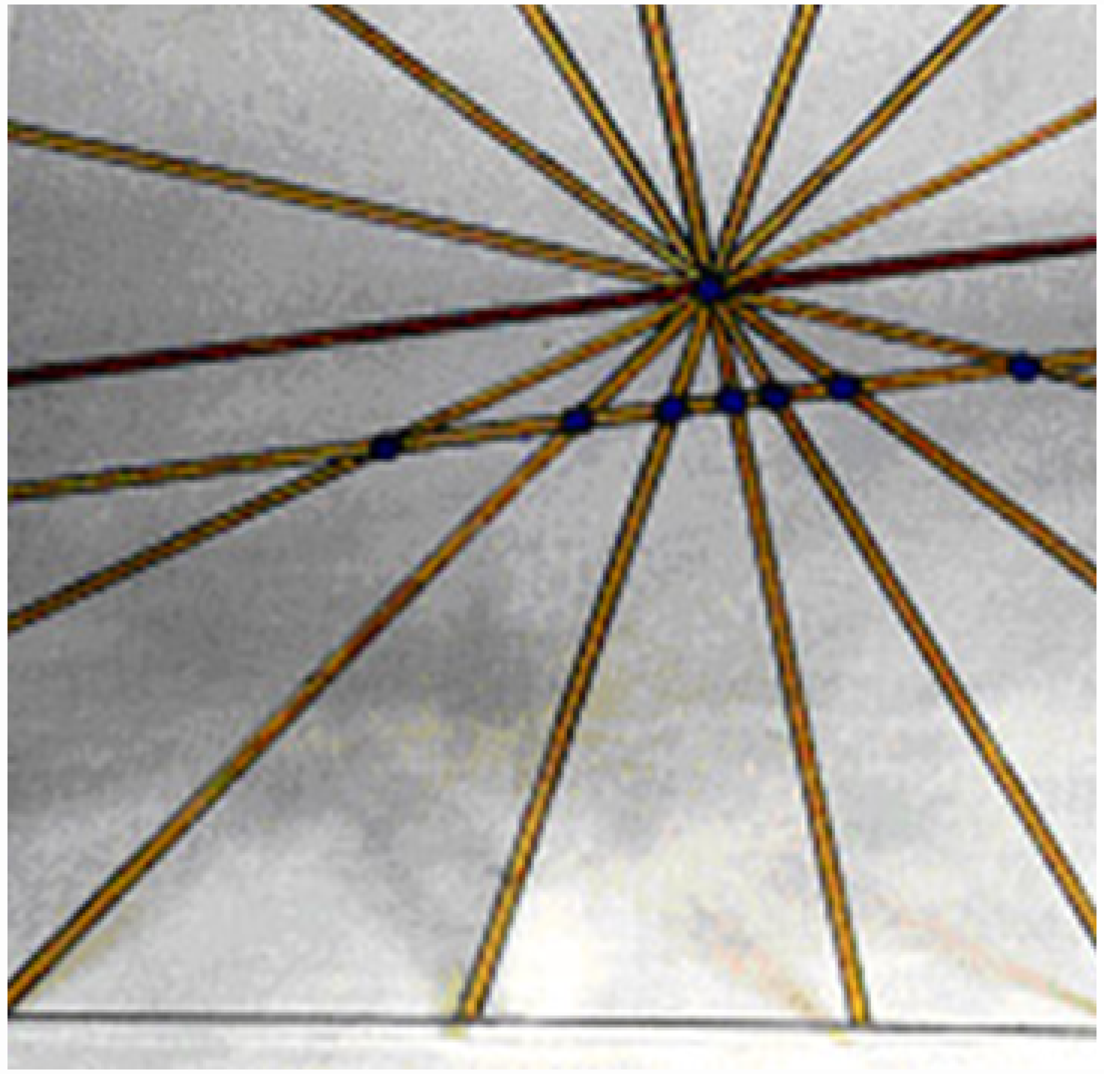


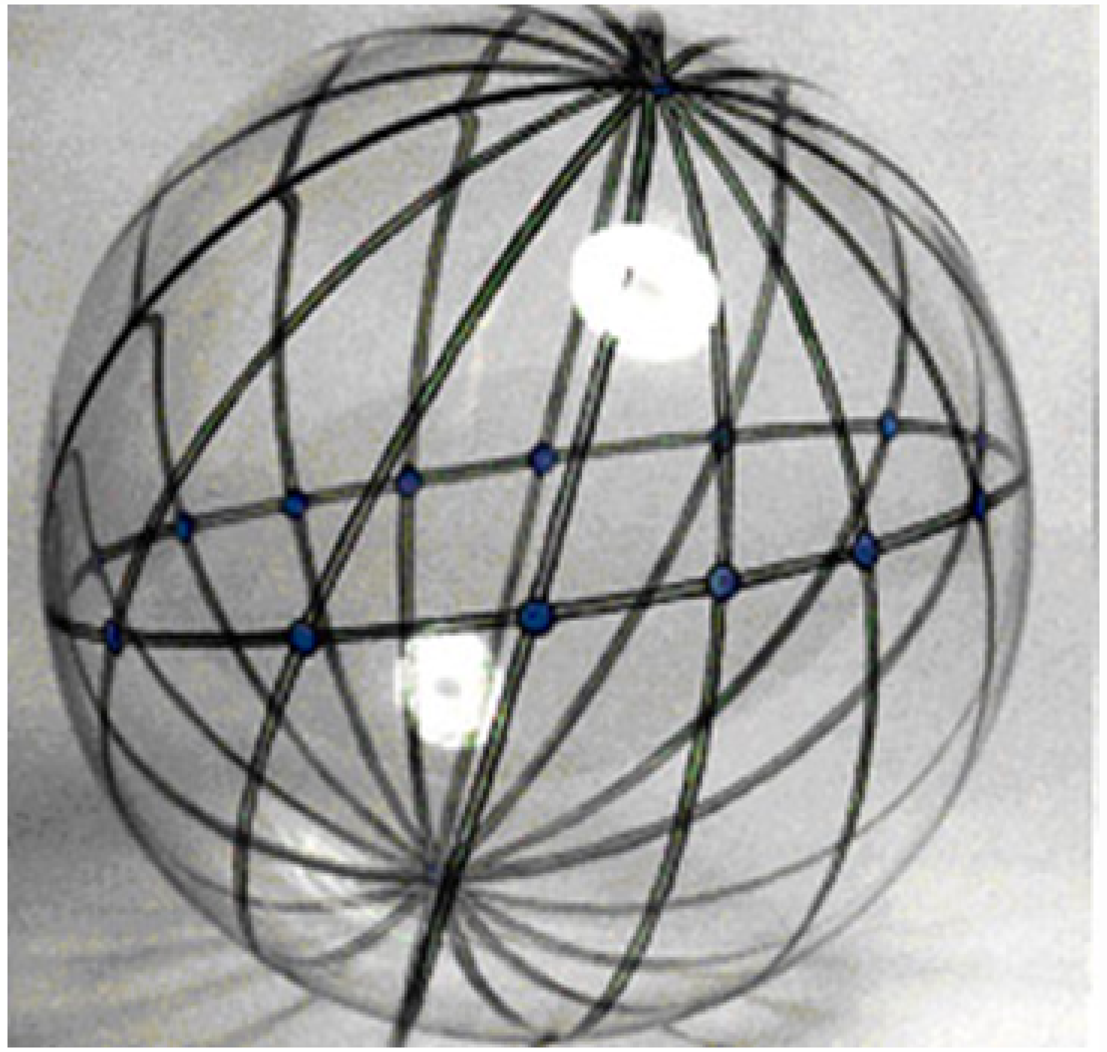


POLI ED EQUATORI

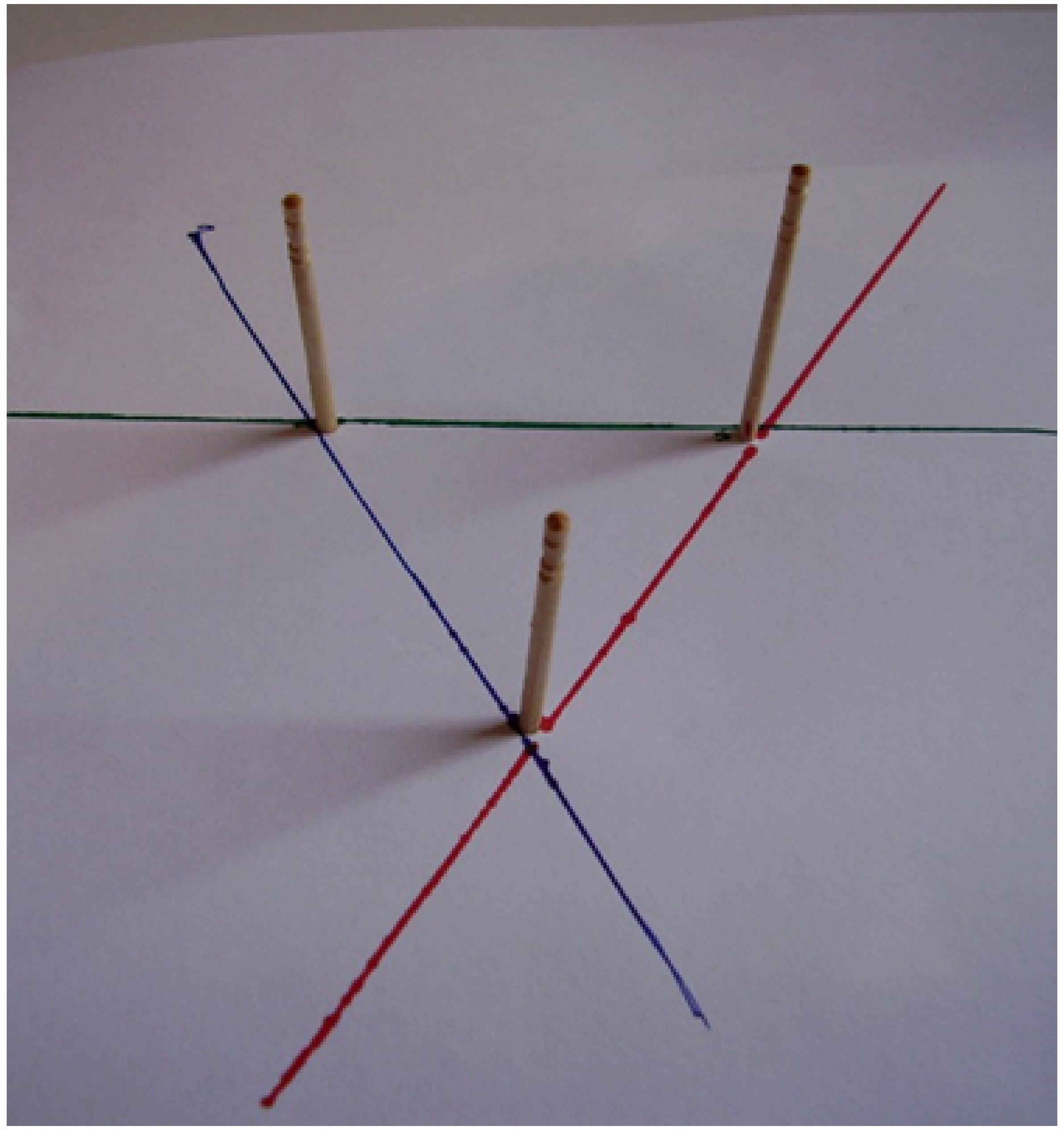


RETTE PARALLELE





TRIANGOLI

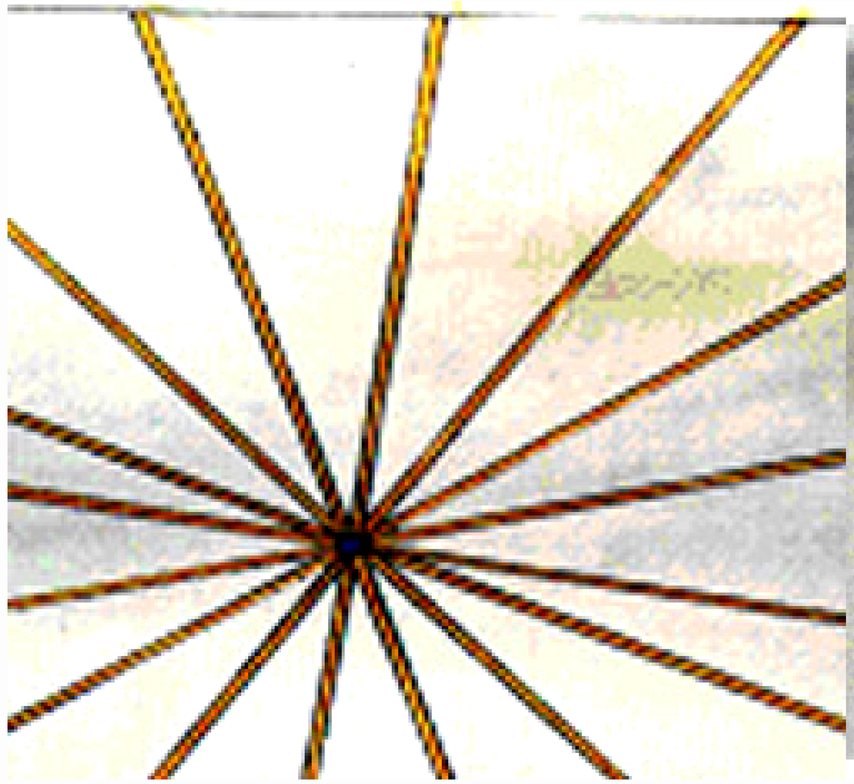


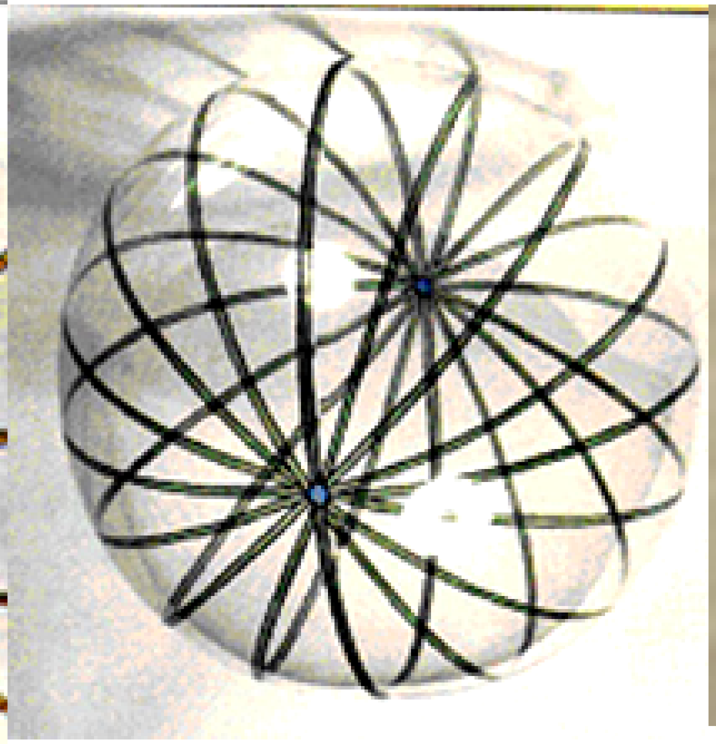
LINEE RETTE

PIANO

SFERA

EMISFERO



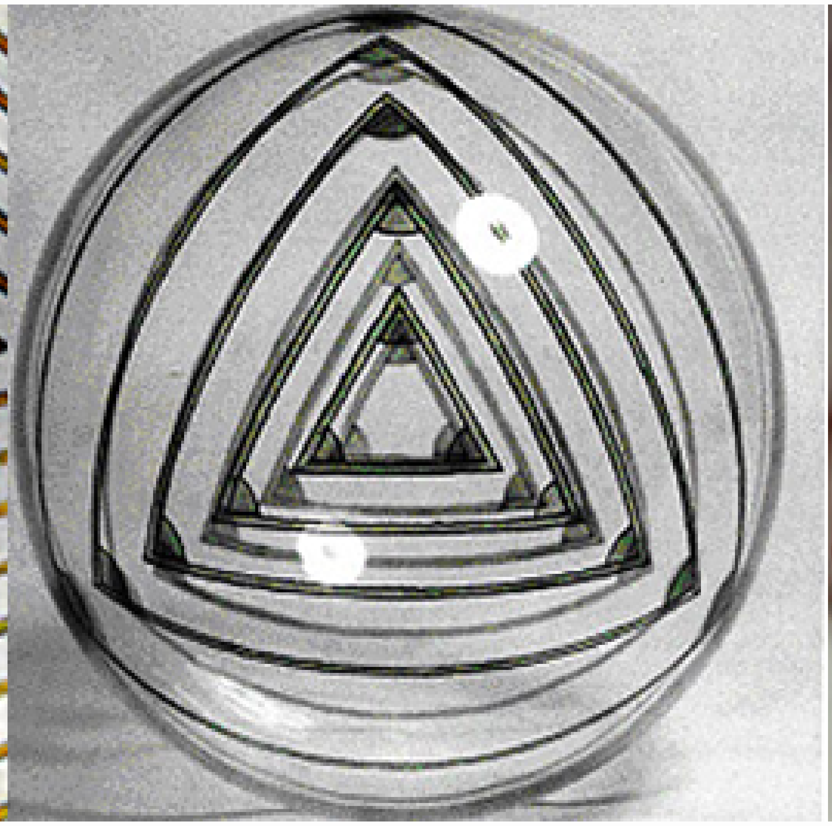


SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO

PIANO

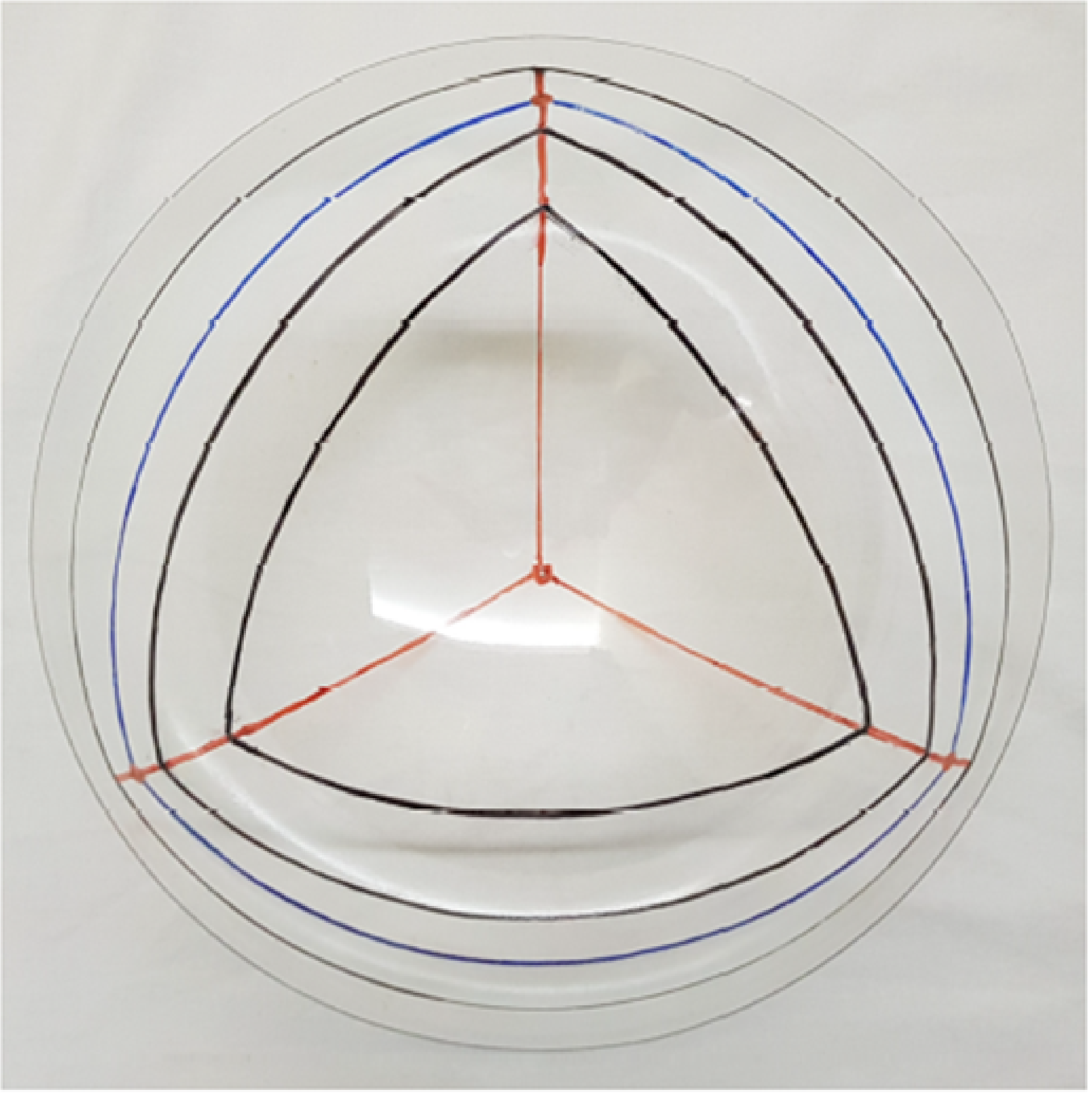
SFERA

EMISFERO



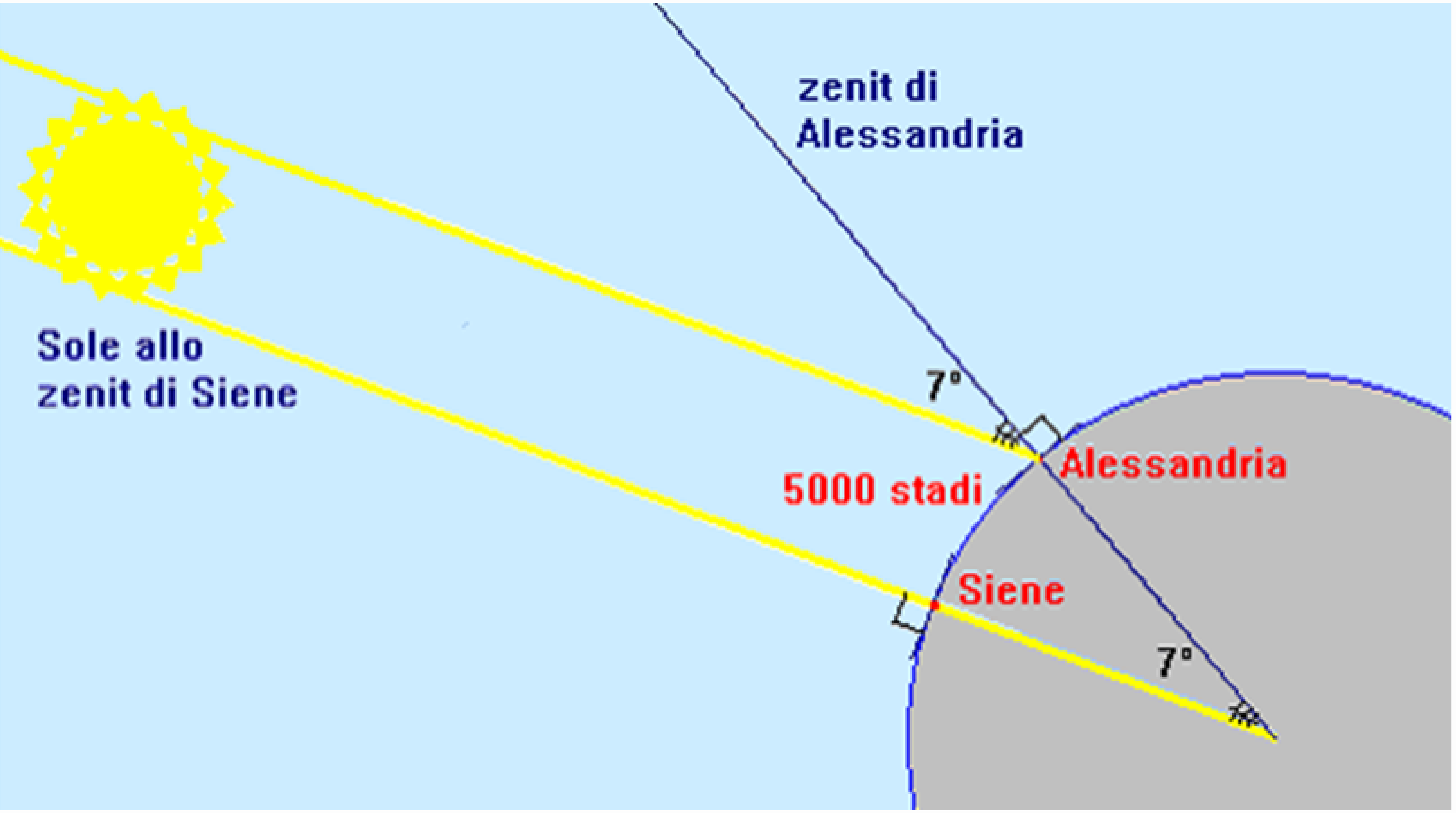
FAMIGLIA DI TRIANGOLI SFERICI EQUILATERI.

IN BLU IL TRIANGOLO CON QUATTRO PUNTI DI TORRICELLI-FERMAT.

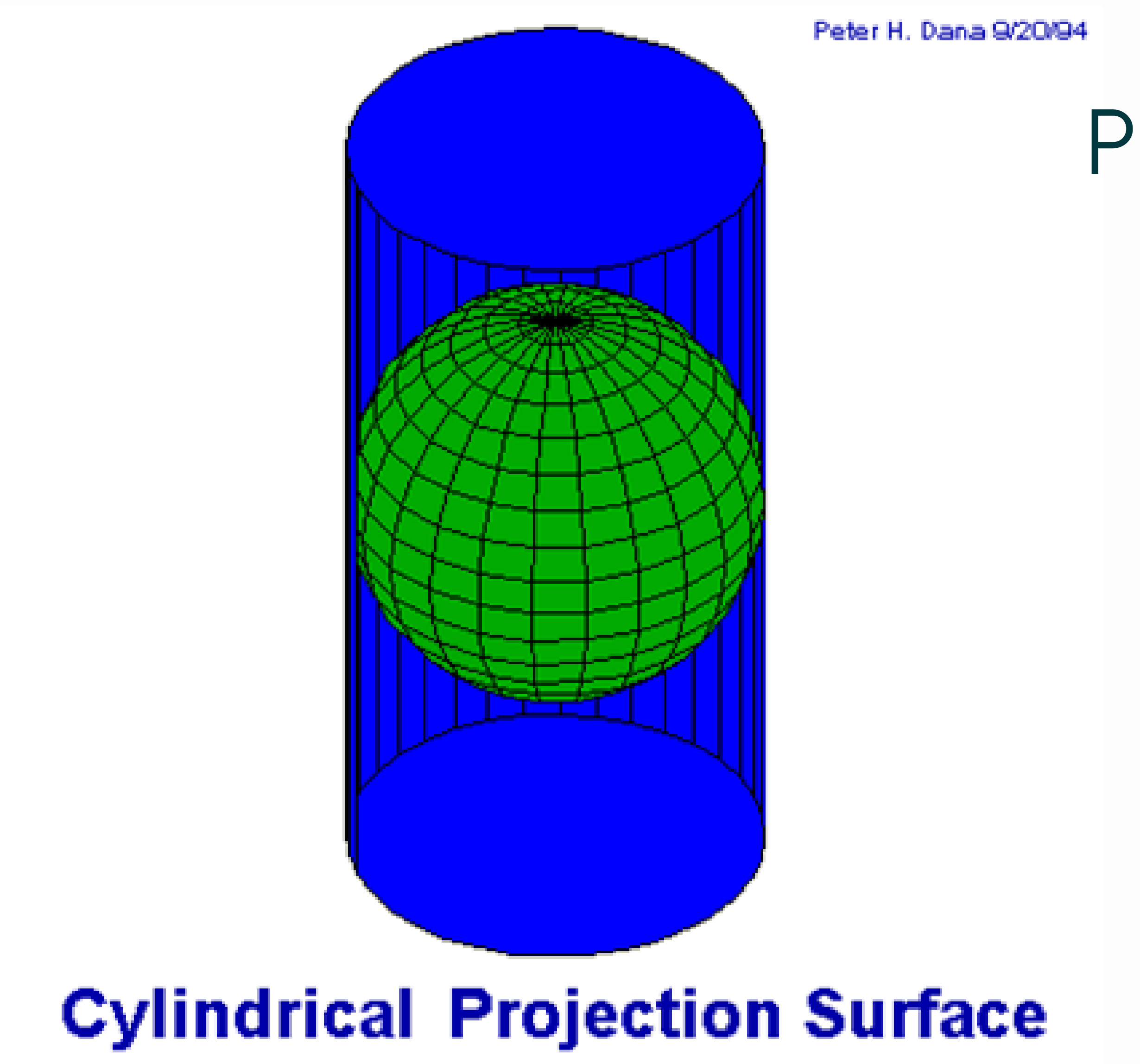


CALCOLO CIRCONFERENZA TERRESTRE

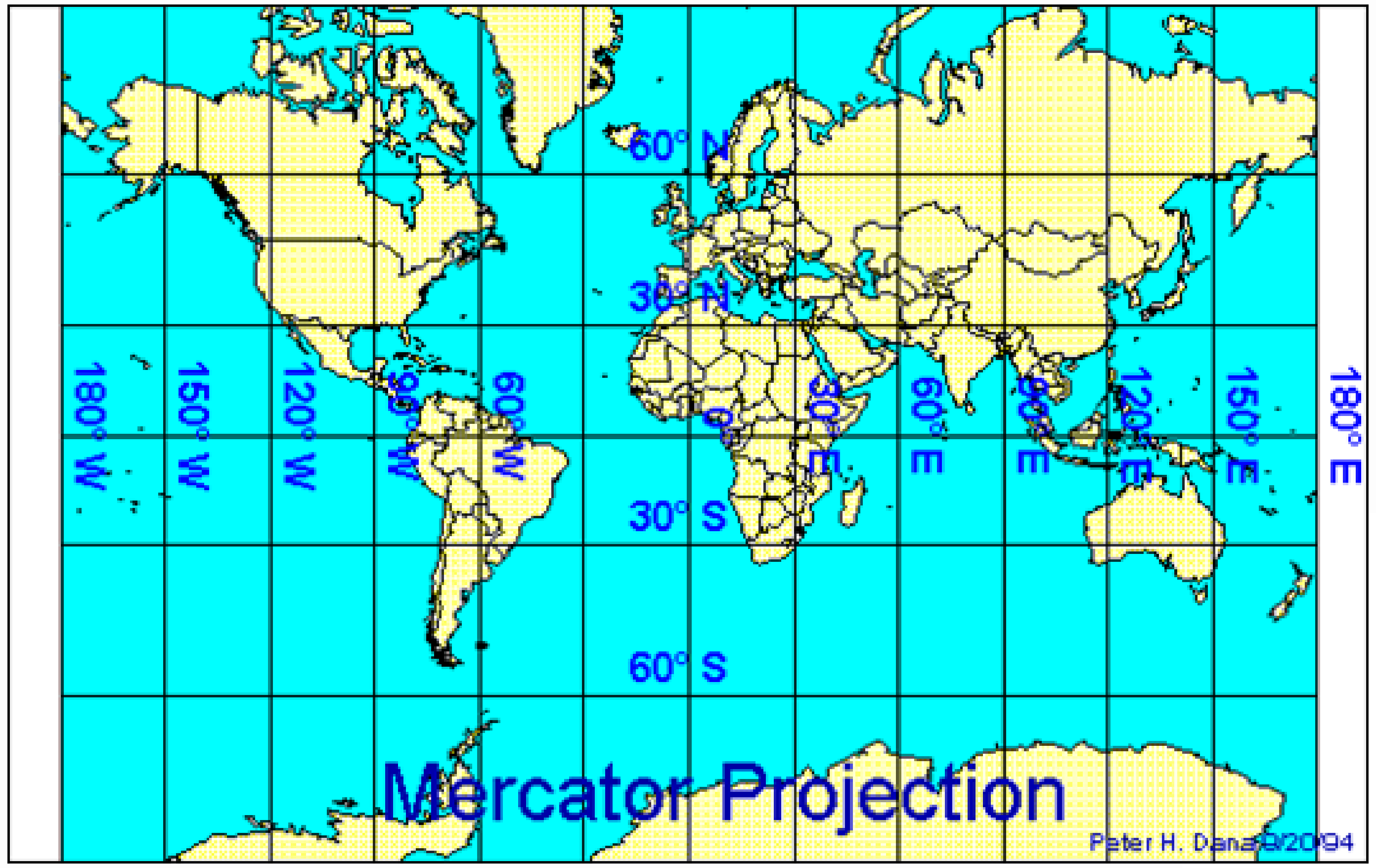
ERATOSTENE



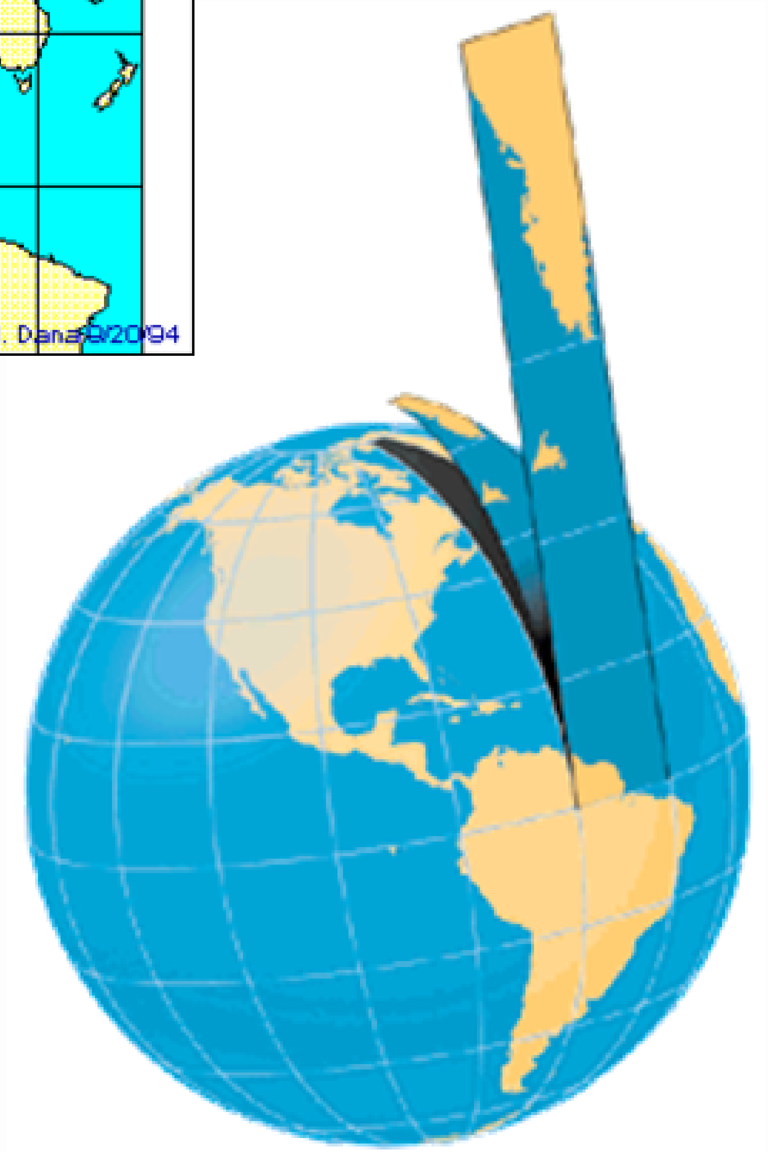
MATEMATICA DELLE CARTE GEOGRAFICHE



PROIEZIONI CARTOGRAFICHE



Paralleli e meridiani sono rette ortogonali.
La rappresentazione è conforme



Grazie dell'attenzione!